

Maschinelle Lernverfahren zur effizienten und interaktiven Auswertung großer Mengen von CAE-Modellvarianten

CAE-Entwicklungsprozesse um ein vielfaches beschleunigen!

Prof. Dr. J. **Garcke**, Fraunhofer Institut SCAI, Sank Augustin und
Universität Bonn;

MSc. R. **Iza-Teran**, Fraunhofer Institut SCAI, Sankt Augustin;

Kurzfassung

Im Produktentwicklungsprozess werden in vielen Industrien numerische Simulationen intensiv eingesetzt, beispielsweise um physikalische Vorgänge virtuell zu untersuchen. Dazu berechnen Entwicklungsingenieure oft Tausende von Simulationsvarianten mit Änderungen von Materialien, Lastfällen oder der Geometrie und analysieren die numerischen Simulationsergebnisse. Ziel dieses Entwicklungsprozesses ist es, iterativ ein Produkt so zu verändern, dass einerseits die erforderlichen funktionellen Eigenschaften erfüllt sind, andererseits Nebenbedingungen wie Kosten oder Regularien eingehalten werden. Die Analyse der Simulationsvarianten wird typischerweise durch 3D-Visualisierungssoftware durchgeführt. Um in den Simulationsvarianten Zusammenhänge zu entdecken und geeignete Varianten auszuwählen muss sowohl viel Zeit als auch ein großes Maß an Ingenieurwissen eingesetzt werden. Ein Engpass im Produktentwicklungsprozess entsteht.

Diese Herausforderung wird mittels mathematischer Verfahren zur Datenanalyse angegangen. Der Ansatz ermöglicht eine schnelle vergleichende Analyse Hunderter oder Tausender von Simulationen beziehungsweise Ausgangsgrößen. Die vorgeschlagene Methode basiert auf nichtlinearer Dimensionsreduktion und nutzt aus, dass vergleichbare Simulationen sich mittels einer niederdimensionalen Parametrisierung darstellen lassen können. Das Verfahren berechnet eine solche Parametrisierung und stellt die Simulationsvarianten in diesem Parameterraum dar. Durch die Reduktion der Dimensionen ist die vergleichende und interaktive Analyse sehr vieler Simulationen realisierbar, da diese auf Grund der Ähnlichkeit ihrer Ergebnisdaten nebeneinander visualisiert werden.

Die für den Einsatz des Verfahrens in einem industriellen Umfeld wesentlichen Schritte werden erläutert. Als konkretes Anwendungsbeispiel wird eine Robustheitsuntersuchung für den Effekt der Positionierung des Stoßfängers bei einem Frontalaufprall eines Autos präsentiert.

Abstract

Simulations are used intensively in the developing process of new industrial products and have achieved a high degree of detail. In that workflow often thousand finite element model variants, representing different product configurations, are simulated within a few days or even overnight. Currently the decision process for finding the optimal product parameters involves the comparative evaluation of large finite element simulation bundles by post-processing each one of those results using 3D visualization software. This time consuming process creates a severe bottleneck in the product design and evaluation workflow.

To handle these data we investigate an analysis approach based on nonlinear dimensionality reduction to find a low dimensional parameterization of the dataset. In such a reduced representation, similar model variants are organized in clusters and the influence of the input variables can be analyzed along such a parameterization. We demonstrate the application of this approach to a realistic and relevant industrial example for robustness analysis of the bumper location in a frontal crash simulation.

1. Der virtuelle Produktentwicklungsprozess

Die virtuelle Produktentwicklung in der Industrie, insbesondere im Automobilbereich, kann durch verschiedene Phasen charakterisiert werden: die Modellbildung, also das Aufsetzen der konkreten Produkteigenschaften mit detaillierter Geometrie und Vernetzung als auch die Spezifikation von Materialeigenschaften sowie von Lastfällen, die Berechnung der resultierenden mehreren Hundert Finite-Element-Simulationen unter Verwendung von spezialisierter Software auf Hochleistungsrechnern und das anschließende Post-Processing der Ergebnisse im Hinblick auf Kenngrößen. Diese letzte Phase nutzt meist eine 3D-Visualisierungssoftware mittels derer ein Simulationsergebnis ausgewertet wird.

Jede Simulation realisiert dabei eine Variante mit einer für den Ingenieur sinnvollen Geometrie- oder Parameteränderung um verschiedene funktionelle Eigenschaften eines Produkts zu optimieren. Insbesondere diese Auswertungsphase ist sehr zeitintensiv, da der Ingenieur auf Grund der Datenkomplexität nur wenige Simulationen gleichzeitig auswerten kann. Im mathematischen Sinne ist dies eine Analyse extrem hochdimensionaler Daten, denn eine Simulation, d.h. ein Datenpunkt, besteht aus mehreren Millionen Gitterpunkten und Hunderten von Zeitschritten. Als Konsequenz entsteht ein (zeitlicher) Engpass in der Produktentwicklung. Ansätze, die diese Herausforderung adressieren, entscheiden über die Wettbewerbsfähigkeit der Unternehmen in einer stark globalisierten Wirtschaft.

Betrachten wir eine Robustheitsanalyse bei Crashversuchen im Automobilkontext etwas genauer. Wir gehen hier davon aus, dass ein SDM-System (Simulation Data Manager) genutzt wird, welches es dem Entwicklungsingenieur erlaubt strukturiert auf Modelle zuzugreifen und Simulationen zu starten. Weiterhin können nach der eigentlichen numerischen Simulation mittels des SDM-Systems die berechneten Simulationsdaten wie Verschiebung, plastische Dehnung, Spannungen, usw. auf dem Finite-Element Gitter zu verschiedenen Zeitschritten in Post-Processing-Software eingelesen werden. Zielgrößen und/oder Metadaten für die Evaluierung und Berichterstellung werden dem Entwickler ebenfalls durch das SDM-System zur Verfügung gestellt.

Im Laufe eines Projekts zur Robustheitsanalyse hat der Produktentwickler mehrere Hunderte Varianten unter verschiedenen kleinen Parameteränderungen wie Blechdicken, Materialeigenschaften und Geometrie berechnet. Das Ziel des Analyseschritts bei Crashversuchen ist es, die Wirkung von (kleinen) Parameteränderungen auf Zielgrößen wie Intrusionen, HIC-Index, Beschleunigung usw. zu untersuchen, unter Beachtung von Nebenbedingungen wie Gewicht oder Kosten. Um das gewünschte Verhalten zu erzielen, wird ein spezifisches zu entwickelndes Bauteil verändert, oder, wenn stärkere Variationen in den Simulationsergebnissen existieren, wird eine Anpassung des gesamten Modells durchgeführt. Der Entwickler entscheidet über die Parameter und den Wertebereich der Veränderung. Mit dieser Information werden (unterstützt durch das SDM System) Hunderte Simulationsmodelle generiert, welche zur eigentlichen Berechnung zum Rechencluster geschickt werden. Nach der Berechnung extrahiert das SDM System die relevanten Zielgrößen als Kennzahlen, Kurven oder Bilder und stellt diese wiederum dem Entwickler zur Verfügung. Diese Information ist die Basis für eine Evaluierung und den Vergleich aller Zielgrößen miteinander, die der Entwicklungsingenieur zeitaufwendig durchführt. Am Ende der Analyse und der daraus resultierenden Gewinnung von Erkenntnissen werden schließlich die Ergebnisse im Rahmen eines Berichts dargestellt. Der gesamte Analyseprozess dauert oft mehrere Tagen, ohne Berücksichtigung der Zeit für die eigentliche numerische Simulation.

Im Folgenden beschreiben wir Ansätze der so genannten nichtlinearen Dimensionsreduktion mit deren Hilfe eine solche vergleichende Analyse interaktiv und schnell durchgeführt werden kann. Grundidee ist hierbei, eine niederdimensionale Einbettung zu berechnen, die eine Darstellung der Simulationen erlaubt, bei der ähnliche Simulationen nebeneinander angeordnet werden. Dies erlaubt eine intuitive Untersuchung der Simulationsergebnisse, Ausgangsgrößen und Kennwerte.

2. Bisherige Verwendung von Dimensionsreduktionsverfahren bei CAE-Daten

Die Nutzung von Methoden des Maschinellen Lernens für die Analyse von CAE-Daten ist relativ neu. Erste Untersuchungen mit der Hauptachsentransformation (PCA) wurden in [1] für die Analyse von Verformungen durchgeführt. Das Tool Diff-Crash (basierend auf der PCA) im Bereich der Stabilitätsanalyse [2] wurde in [3] und in [4] untersucht. Ein Verfahren der nichtlinearen Dimensionsreduktion (Diffusion Maps) wurde in [5] ausführlich behandelt. Mehrere Verfahren zur Dimensionsreduktion, sowie die Nutzung von Clustering in einem Vorverarbeitungsschritt, wurden im Rahmen des BMBF-Projektes SIMDATA-NL [6] untersucht und Ergebnisse in [7] präsentiert. Diese bisherigen Untersuchungen von nichtlinearer Dimensionsreduktion für CAE-Daten ergaben viel versprechende Resultate, aber bisher wurden solche Untersuchungen nicht auf aktuellen industriellen Beispielen durchgeführt.

3. Mathematische Grundlagen der Dimensionsreduktionsverfahren für CAE-Daten

Datensätze aus numerischen Simulationen im CAE-Bereich werden als hochdimensionale Daten betrachtet, wobei die Dimension hier der Anzahl an Finite-Elemente-Knoten entspricht. Viele solcher Datensätze werden im Laufe des Produktentwicklungsprozesses generiert, wobei Änderungen beim Lastfall, bei Materialparametern oder in Details der Geometrie auftreten und so viele Modellvarianten erzeugt werden. Es kann dabei allerdings angenommen werden, dass eine gewisse Ähnlichkeit unter den Simulationen besteht und die Daten somit hochkorreliert sind. Aus mathematischer Sicht bedeutet dies, dass um die Variabilität der Varianten darzustellen eigentlich viel weniger Dimensionen notwendig sind, als die ursprünglichen Daten aufweisen. Ein abstrakter Raum mit einer niedrigen intrinsischen Dimension wird bestimmt, in welchem dann die Variabilität einfacher dargestellt werden kann.

Für das grundlegende Verständnis betrachten wir zunächst ein einfaches ein-parametrisches theoretisches Beispiel:

Satz:

Sei ein Finite-Element Modell auf einen 1D-Gitter $[r_1, r_2, \dots, r_n]$ mit n Knoten gegeben. Das Modell hänge von einem Materialparameter α ab und es werden M Varianten für verschiedene α 's simuliert, so dass die Simulationen $S_{\alpha_i}(r_1, \dots, r_n) \rightarrow R^n$ wie folgt dargestellt werden können:

$$x_i = S_{\alpha_i}(r_1, \dots, r_n), \quad i = 1, \dots, M$$

Behauptung: Die Simulationen liegen auf einer intrinsischen eindimensionalen Kurve.

Beweissketch:

Die Punkte x_i , $i = 1, \dots, M$ liegen im R^n . Da das Modell nur von einem Modellparameter α abhängt, existiert eine Abbildung $u(\alpha): R \rightarrow R^n$ welche die Punkte α_i in den hochdimensionalen Raum überführt. Mit dem Ziel diese approximativ zu rekonstruieren wird eine Ähnlichkeitsmatrix W konstruiert, deren Matrixeinträge wie folgt berechnet werden:

$w_{ij} = e^{\|x_i - x_j\|} / \varepsilon$, wobei ε die Breite der Gauß-Glocke bestimmt. Nach einer Normalisierung

der Matrix wird der diskrete Operator P über die Beziehung $Pf(x_i) = \sum_{j=1}^M p(x_i, x_j) f(x_j)$

definiert, wobei die $p(x_i, x_j)$ Einträge der normalisierten Matrix sind. In [8] wurde gezeigt dass im Grenzfall $M \rightarrow \infty$ der Matrix-Operator gegen den eindimensionalen Laplace-

Operator mit zugehörigem Eigenwert konvergiert, d.h. $\frac{d^2 f}{d^2 \alpha} = \lambda f$. Für eine geschlossene

Kurve f mit zwei Endpunkten und Länge $\alpha_{\max}$ ergibt sich die erste nicht-null Eigenfunktion

des Laplace-Operators als $\cos(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}})$.

Dies bedeutet, dass für genügend großes M der diskrete Operator P näherungsweise dem Laplace-Operator entspricht, und der zweite Eigenvektor von P eine Kurve approximiert, welche den Verlauf des Materialparameters darstellt. $\square$

Das Beispiel zeigt, dass datenbasierte Verfahren der nichtlinearen Dimensionsreduktion in der Lage sind, solche Abhängigkeiten von niederdimensionalen Parameter zu finden, auch wenn die Daten zunächst in einem höherdimensionalen Raum liegen. Der erste nicht-null Eigenvektor der Matrix mit Einträgen $p(x_i, x_j)$ approximiert hierbei die Eigenfunktion

$\cos(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}})$, was bedeutet das der Parameter α auf diese Art identifiziert werden kann,

beziehungsweise der Cosinus davon.

Das Beispiel demonstriert zudem auf sehr einfache Art das Potential solcher Verfahren die relevanten niederdimensionalen Parameter zu berechnen, insbesondere in Hinblick auf die Zahl an Knoten in den entsprechenden Finite-Element-Simulationen (mehrere Millionen). Wird eine Parametrisierung der Simulationen (oben durch den Parameter α gegeben) gefunden, kann eine Anordnung aller Simulationen allein auf Basis dieses, nun vom

Analyseverfahren berechneten, Parameters durchgeführt werden. Dies bedeutet eine enorme Beschleunigung der Analyse vieler Datensätze, da in der niederdimensionalen Einbettung nun ähnliche Simulationen nah beieinander angeordnet werden.

Es sei bemerkt, dass für das PCA-Verfahren, angewandt auf diese Problemstellung, keine vergleichbare Konvergenz gegen einen kontinuierlichen Operator existiert. Auch aus diesem Grund verwenden wir in unserer Arbeit das dargestellte nichtlineare Verfahren.

Sowohl an der Entwicklung von Verfahren zur nichtlinearen Dimensionsreduktion als auch an deren Anwendung wird in den letzten Jahren sehr aktiv geforscht. Es existieren viele, zum Teil verwandte, Verfahren, die alle das Ziel haben, eine niederdimensionale Parametrisierung eines Datensatzes zu erreichen [9, 10]. Wir geben exemplarisch die Schritte des Diffusion Maps Verfahrens an [8]:

Diffusion Maps Verfahren:

- **Eingangsdaten:** M Datensätze aus Simulationen $x_i \in R^n$, $i = 1, M$ wobei n die Anzahl der Knoten/Elementen ist.
- **Prozess**
 - o Berechnung der Matrixeinträge $w(i, j) = e^{\|x_i - x_j\|} / \varepsilon$
 - o Normalisierung
 - o Lösung des Eigenwertproblems
 - o Eigenvektoren zu den größten Eigenwerte auswählen
 - o Berechnung der Dimension d des Parameterraums
- **Ausgangsdaten:** Koeffizienten bezüglich der d Eigenvektoren ergeben parametrische Koordinaten der niederdimensionalen Einbettung.

4. Vorgehen bei der Nutzung von Dimensionsreduktionsverfahren bei CAE-Daten

Ziel unserer Forschungsarbeit war die Untersuchung und Entwicklung von nichtlinearen Verfahren zur Dimensionsreduktion bei CAE-Daten, welche auch für den produktiven Einsatz in der Industrie geeignet sein sollen. Der Ablauf des Datenanalyseprozesses soll sich dazu einer normalen industriellen Infrastruktur anpassen. Wir stellen schematisch in Abbildung 1 die verschiedenen Komponenten eines idealisierten Analyseprozesses dar. Der Ansatz soll dabei in eine existierende Umgebung (über ein SDM) eingebettet werden. Wir präsentieren

im Weiteren eine detaillierte Darstellung der Analyseschritte unter der Annahme, dass im Rahmen der virtuellen Produktentwicklung Robustheitsuntersuchungen durchgeführt werden sollen. Wir gehen hier davon aus, dass die CAE-Daten sich in großen Datenarchiven befinden, perspektivisch in riesigen Archiven auf einem entfernten Server.

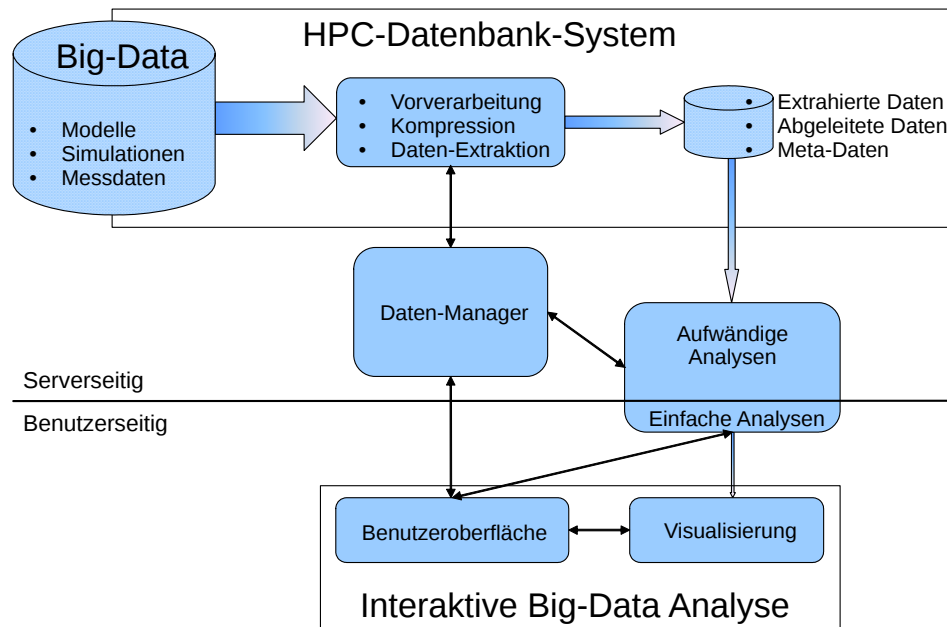


Abbildung 1: Konzeptuelle technische Infrastruktur bei der virtuellen Produktentwicklung. Eine solche strukturierte Organisation der Daten erlaubt die effiziente Anwendung der nichtlinearen Dimensionsreduktion zur Datenanalyse.

4.1. Vorverarbeitung

Um das Verhalten eines Produkts zu evaluieren wählt der Ingenieur geeignete Bereiche der Struktur eines Autos aus, z.B. die Stirnwand und die Längsträger. Diese Daten werden dann für die Analyse extrahiert unter Nutzung von bestehenden SDM-Systemen. Idealerweise wird die Auswahl für die Datenextraktion schon vor der numerischen Berechnung getroffen, so dass nach jeder numerischen Simulation die Datenextraktion automatisiert bei der Nachverarbeitung durchgeführt wird, die z.B. zur Kompression oder zur Berechnung von typischen Kenngrößen ohnehin stattfindet.

4.2. Analyse mit Dimensionsreduktion

Der Dimensionsreduktionsschritt erstellt einen Überblick der zu betrachtenden Simulationsergebnisse. Diese Phase nutzt die extrahierte Information um alle Simulationen automatisch zu parametrisieren, wobei Simulationen mit ähnlichen numerischen Ergebnissen nahe beieinander im niederdimensionalen Einbettungsraum liegen. Die Parametrisierung

erlaubt es grundsätzlich auch, Informationen über die Änderung der Eingangsparameter mit einzubeziehen.

4.3. Interaktive Exploration des Parameterraums und Berichterstellung

Der aus der Dimensionsreduktion abgeleitete Parameterraum kann z.B. als 2D oder 3D Raum graphisch dargestellt werden, wobei jeder Punkt im Raum einer Simulation entspricht. Der Entwickler kann im berechneten Einbettungsraum schnell und intuitiv erkennen welche Wirkung bestimmte Kombinationen von Eingangsparametern auf die Robustheit haben.

Diese Erkenntnis kann der erfahrene Entwickler heutzutage auch ohne einen Einsatz von Dimensionsreduktion erlangen, allerdings erfordert der typische Analyseprozess einen hohen Zeitaufwand für eine eher repetitive Aufgabe, die aber doch größere Ingenieur Erfahrung benötigt. Insgesamt erfordert der neue Ansatz zur Analyse der Simulationsdaten, inklusive der Berichterstellung, nur wenige Stunden, während sie ohne Dimensionsreduktion oft mehrere Tage in Anspruch nimmt.

5. Anwendungsbeispiel:

Robustheitsuntersuchung des Stoßfängers im Frontalaufprall

Wir betrachten einen Frontalaufprall eines Toyota-Modells mit 998,000 Knoten und etwa der gleichen Anzahl von Elementen, welches als öffentliches Modell von der NCAC [11] zur Verfügung gestellt wird.

Eine Robustheitsuntersuchung des Einflusses der Position der Stoßfänger auf das Verhalten bei einem Frontalcrash wird durchgeführt. Insgesamt wurden 243 Simulationen mit LSDYNA durchgeführt, wobei jeder Simulation eine unterschiedliche Position der Stoßfänger zugeordnet ist, der Ansatzpunkt wird kreisförmig variiert (vgl. Abbildung 2). Die Datenbasis für die Analyse bilden die von jedem Lauf gespeicherten 26 Zeitschritte.

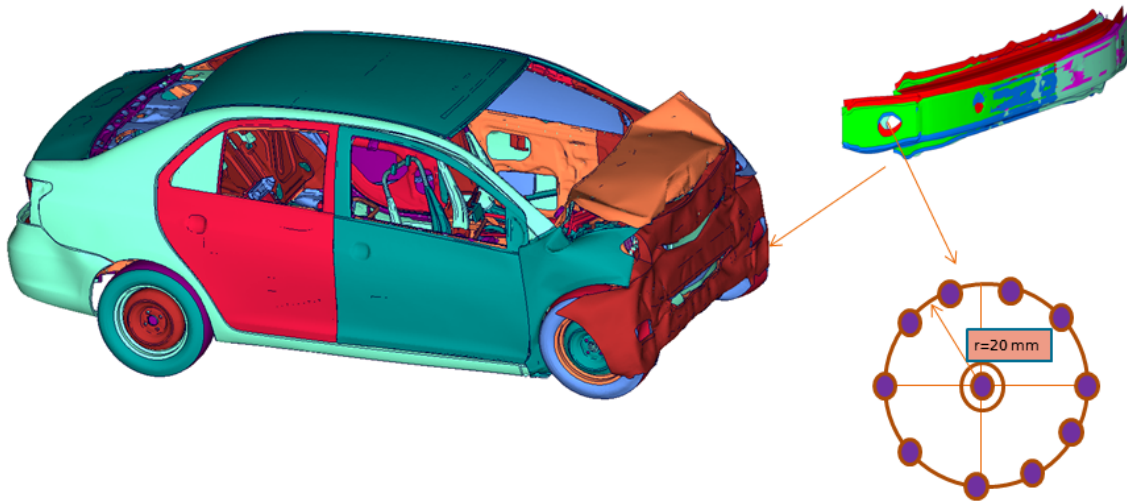


Abbildung 2 Frontalaufprall eines Toyota Varis. Die Positionierung des Stoßfängers wird in einem Kreis von 20mm Radius variiert.

Ein Software-Prototyp implementiert die Analyseschritte aus Abschnitt 3. In der Vorverarbeitungsphase werden spezifische Bereiche des Autos vom Entwicklungsingenieur ausgewählt. Für die Untersuchung der Auswirkung auf den Frontalaufprall sind insbesondere Stirnwand und Längsträger relevant. Die relevante Struktur, welche die gesamte Crash-Last möglichst abfangen soll, wird von jeder einzelnen Variante extrahiert (siehe Abbildung 3).

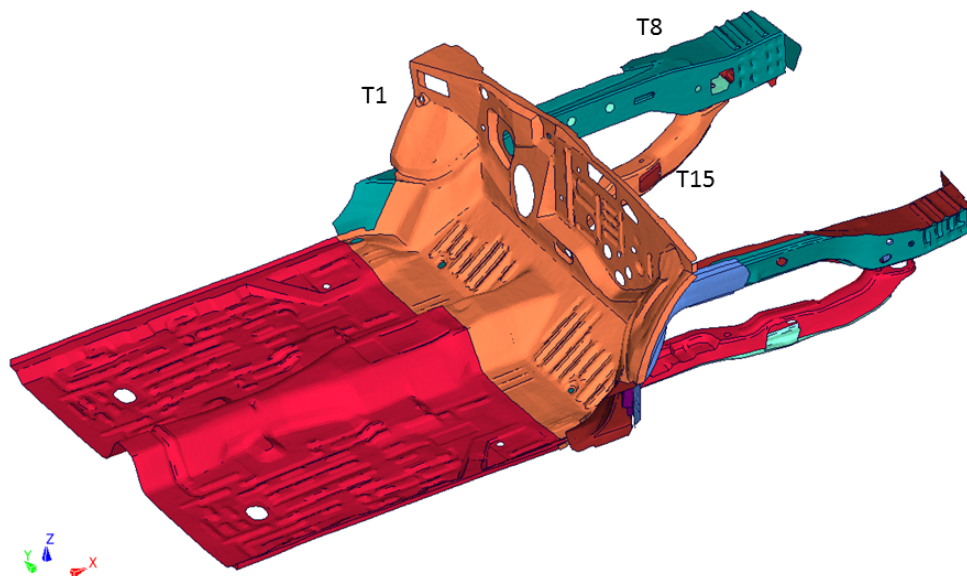


Abbildung 3: Innere Struktur mit Stirnwand und Längsträgern für das Toyota-Beispiel.

Die Verformungen im Zeitschritt 16 werden als Variablen für die Analyse ausgewählt. Die Verformungen liegen nun als Vektoren im $3n$ -dimensionalen Euklidischen Raum vor, wobei n der Anzahl der Knoten des ausgewählten Bauteils entspricht. Nun wird das in Abschnitt 3 vorgestellte Verfahren der nichtlinearen Dimensionsreduktion verwendet. Das genutzte Ergebnis ist ein dreidimensionaler Vektor, welcher für jede der 243 Simulationen die Einbettungskordinaten der berechneten niederdimensionalen Parametrisierung darstellt (siehe Abbildung 4).

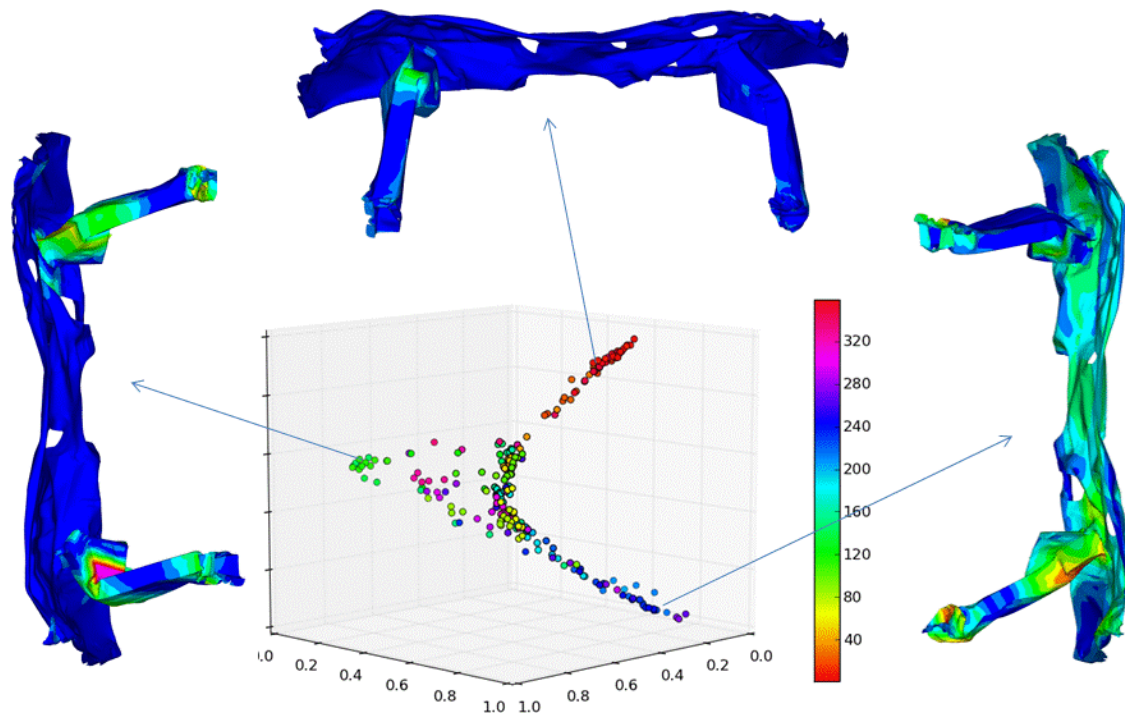


Abbildung 4: 3D Parameterraum der Verformungen von Stirnwand und Längsträgern (ohne die Bodenplatte). Jeder Punkt wird einer Verformung zugeordnet, die Farbe der Punkte bezieht sich auf die Winkelposition der Stoßfänger. Auf den Bauteilen wird der Abstand zur Verformung einer Referenzkonfiguration dargestellt.

Ein entwickelter Software-Prototyp erlaubt die interaktive Exploration des Parameterraums, was die Erkennung von drei verschiedenen Verformungsmodi, je nach Winkelbereich, ermöglicht. Die verformte Stirnwand mit Längsträger wird exemplarisch für drei Punkte, repräsentativ für die 3 erkannten Modi, der 3D-Punktwolke gezeigt, welche die Einbettung der Daten in den berechneten Parameterraum darstellt. Die punktwisen Differenzen zu einer ausgewählten Referenzverformung werden farbig auf den Bauteilen dargestellt und die

Färbung jedes Punktes im Parameterraum korrespondiert zur Winkelposition der Stoßfänger in der entsprechenden Simulationsvariante.

Die Erstellung einer solchen 3D-Punktwolke und die zugehörige Exploration dauern nur einige Minuten, während die Datenverarbeitung und Extraktion etwa 2 Stunden in Anspruch nimmt. Ein Beispiel der möglichen Darstellung der Ergebnisse der Analysephase für eine Präsentation oder einen Bericht wird in Abbildung 5 dargestellt.

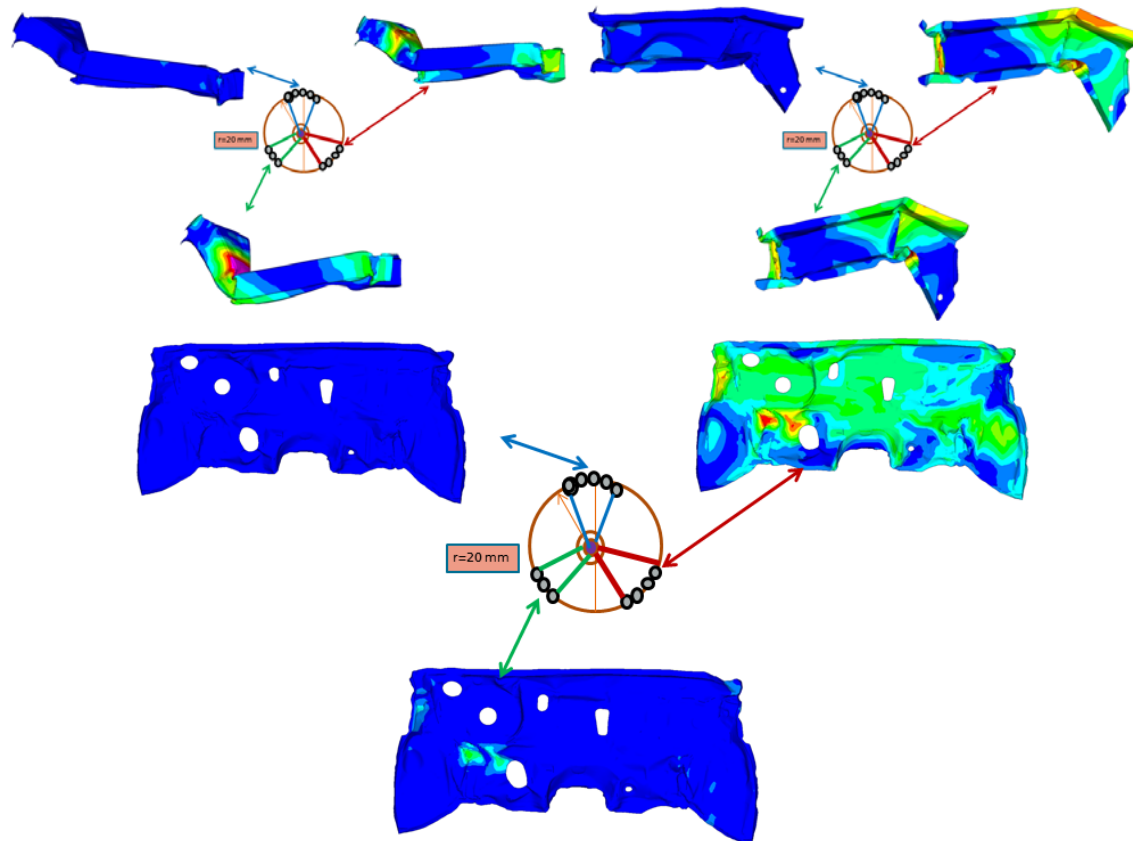


Abbildung 5: Verformungsmodi der beiden Längsträger und der Stirnwand in Abhängigkeit vom Winkel der Stoßfänger.

Es zeigt sich, dass mit Hilfe dieser neuartigen Methoden ein konzeptionell anderer Zugang zur Analyse der riesigen Datenmengen im virtuellen Produktentwicklungsprozess möglich ist. Die Methodik erlaubt ein intuitives und interaktives Agieren mit den Simulationsergebnissen und stellt dem Entwicklungsingenieur damit einfache Möglichkeiten zur vergleichenden und gleichzeitigen Betrachtung vieler Simulationläufe zur Verfügung.

Die präsentierten Arbeitsergebnisse sind in Teilen durch das KMU-Innovativ Projekt FEMMINER und das BMBF-Projekt SIMDATA-NL finanziert worden. Die Variationen der Position der Stoßfänger wurden von Claudius Schoene (GNS mbH) im Rahmen von FEMMINER erstellt.

Literatur

- [1] S. Ackermann: Principal Component Analysis for Detection of Globally Important Input Parameters in Nonlinear Finite Element Analysis, IAM Institute of Applied and Experimental Mechanics, 2008.
- [2] Diff-Crash, Stability Analysis for Simulation Results, SIDACT GmbH, www.sidact.com/diffcrash.html.
- [3] L. Mei and C. Thole: Data Analysis for Parallel Car-Crash Simulation Results and Model Optimization, Sim. Modelling Practice and Theory: Vol 16,3:pp 329-337, 2008.
- [4] C. Thole, L. Nikitina, I. Nikitin and T. Clees: Advanced mode analysis for crash simulation results, Proc. 9th LS-DYNA Forum, 2010.
- [5] R. Iza-Teran: Enabling the Analysis of Finite Element Simulation-Bundles, International Journal of Uncertainty Quantification, Begell House Publishing, 2013.
- [6] M. Griebel , Hans-Joachim Bungartz, Claudia Czado, Jochen Garcke, Ulrich Trottenberg, Clemens-August Thole, Bastian Bohn, Rodrigo Iza-Teran, Alexander Paprotny, Benjamin Peherstorfer und Ulf Schepsmeier: SIMDATA-NL - Nichtlineare Charakterisierung und Analyse von FEM-Simulationsergebnissen für Autobauteile und Crash-Tests, Abschlussbericht des BMBF-Projekts, 2014.
<http://garcke.ins.uni-bonn.de/research/pub/SIMDATA-NL-Abschlussbericht.pdf>
- [7] B. Bohn, J. Garcke, R. Iza-Teran, A. Paprotny, B. Peherstorfer, U. Schepsmeier and C. Thole: Analysis of car crash simulation data with nonlinear machine learning methods, Proceedings of the ICCS 2013, Vol 18: pp 621-630, Elsevier 2013.
- [8] B. Nadler, S. Lafon, R. R. Coifman, and I. G. Kevrekidis: *Diffusion Maps*. Applied and Computational Harmonic Analysis: Special issue on Diffusion Maps and Wavelets, Vol 21: pp 5-30, July 2006.
- [9] J. Lee and M. Verleysen: Nonlinear Dimensionality Reduction, Springer, 2007.
- [10] J. Wang: Geometric Structure of High-Dimensional Data and Dimensionality Reduction, Springer, 2012
- [11] O. Kenneth: NCAC Finite Element Model Archive, <http://www.ncac.gwu.edu/vml/models.html>.